代数幾何学シンポジウム記録
1997年度 pp.185-198

Kummer曲面の自己同型群

名大・多元数理
金銅誠之

§0. はじめに

種数2の曲線に付随したKummer曲面は、19世紀後半に集中的に研究された(e.g. Hudson [3])。この自己同型群は離散無限群であり、多くの興味深い自己同型が知られている。F. Kleinは論文[6]の中で"自己同型群が知られている自己同型で生成されるか"という問題を提出している。1901年、Hutchinson [4]は新しい自己同型を発見することで、この問の否定的解を与えた。以後、新しいものは発見されず、Kummer曲面の自己同型はclassicalに知られたもので生成されるかという問題は残されたままであった。が、最近 Keum [5]が、新たな自己同型を発見した。

本論では、"generic" Kummer曲面の自己同型群がclassical及びKeumが見つけた自己同型で生成されることを見る。証明には、本質的に階数24の特別な性質を持つ、Leech格子の存在が用いられる。

§1. 歴史と主定理

以下、最後まで $\mathbb{C}$ 上で考える。C を genus 2 の曲線、$J(C)$ をその Jacobian とする。C は $\mathbb{P}^1$ 上の二重被覆で 6点 $p_0, p_1, \dots, p_5$ ($\in C$) で分岐している。今 C の $J(C)$ への埋め込み

$$\varphi : C \hookrightarrow J(C), \quad \varphi(p) = [p - p_0]$$

を考える。被覆 $C \to \mathbb{P}^1$ の被覆変換は $J(C)$ の involution ι を引き起こし、$J(C)$ の 2-torsion points が ι の固定点となる。商曲面 $J(C)/\langle\iota\rangle$ は 16個の通常二重点 $\{n_\alpha\}$ を持ち、その極小モデル X を C に付随した Kummer曲面 と呼び、$Km(C)$ と表わす。次の事は昔から知られていた：

Fact (i) : X は 16個の互いに交わらない nodal curve $\{N_\alpha\}$ (非特異有理曲線)を含む。N_α は $J(C)/\langle\iota\rangle$ の node n_α 上の例外曲線である。一方、X は別の互いに交わらない16個の nodal curves $\{T_\beta\}$ を含む。$\{T_\beta\}$ は theta 因子 Θ ($:= \varphi(C)$) 及び、その 2-torsion による translation に対応している。これら32個の曲線 $\{N_\alpha, T_\beta\}$ の configuration を、Kummer $(16)_6$ configuration と呼ぶ。

(ii) : 次の可換図式が存在する。ここで F は 16個の nodes を持つ4次曲面である。

$$\begin{tikzcd}
J(C) \arrow[rr, "|2\Theta|", "2:1"'] \arrow[dr] & & F \subset \mathbb{P}^3 \\
& J(C)/\langle\iota\rangle \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(iii) $\sum (N_\alpha + T_\beta)/4$ は $Pic(X)$ に含まれ、その linear system は、$X = Km(C)$ の $\mathbb{P}^5$ の中への埋め込みを与える。像は、3つの quadric の完全交叉で、$\{N_\alpha, T_\beta\}$ は、32本の line に写される。

以上の準備の下に、知られている自己同型を紹介する。

① 16 translations $\{t_\alpha\}$: $J(C)$ の 2-torsion による translation は involution ι と可換で、$X = Km(C)$ の involution $\{t_\alpha\}$ を引き起す。

② Switch σ : F の dual $F^* \subset \mathbb{P}^{3*}$ は F と射影的に同型であり、これから involution $\sigma : X \longrightarrow X$, $\sigma(N_\alpha) = T_\alpha$ の存在が従う。

③ 16 projections $\{p_\alpha\}$: F の node n_α からの projection

$$F \setminus \{n_\alpha\} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2$$

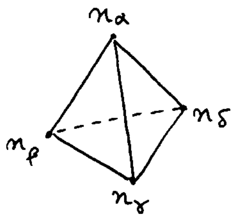
の被覆変換は X の involution p_α を引き起す。

④ 16 correlations $\{\sigma \circ p_\alpha \circ \sigma\}$: F の dual F^* の projection。

(注) 以上は、Klein [6] で述べられている。Klein は $Aut(X)$ は、これらで生成されるか問うている。

⑤ Sixty Cremona transformations $\{C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}\}$ (Hutchinson [4]):
F の4個の nodes から成る集合 $\{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta\}$ は、どの3点も T_α の F への像の conic 上にのらないとき、Göpel tetrad と呼ばれる。Göpel tetrad $\{n_\alpha, \text{—}, n_\delta\}$ を頂点とする tetrahedron が

$xyzt=0$ で与えられているとする。このとき F の方程式は



$$A(x^2t^2+y^2z^2)+B(y^2t^2+z^2x^2)+C(z^2t^2+x^2y^2)$$
$$+Dxyzt+F(yt+zx)(zt+xy)+$$
$$G(zt+xy)(xt+yz)+H(xt+yz)(yt+zx)=0$$

で与えられる。Cremona 変換

$$(x, y, z, t)\longmapsto(1/x, 1/y, 1/z, 1/t)$$

は F を保ち，従って $X=Km(C)$ の involution $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ を引き起す。Göpel tetrads は 60 個存在し，60 個の involution を得る。

⑥ (Keum [5], 1997). 最近，Keum が新しい 192 個の自己同型を見つけた。方法は，まず Hodge isometry で Kähler cone を保つものを構成し Torelli 型定理より存在を示すものである。正確な定義は Keum [5], Kondo [7] を参照せよ。後で，この自己同型の性質について述べる。

本論の結果は次の通りである：

<u>主定理</u>.

$X=Km(C)$ は generic とする。すなわち，$J(C)$ の Neron-Severi 群は C で生成されているとする。このとき，$Aut(X)$ は上記 ①－⑥ の自己同型で生成される。

§2. 代数的K3曲面の自己同型群

$X=Km(C)$ は algebraic K3 曲面である。この節では algebraic K3曲面の自己同型群の記述について復習する。

Y を alg. K3 曲面，S_Y を Y の Picard 格子（Picard 群と交点形式の組）とする。Hodge の指数定理より，S_Y の符号は $(1, \rho-1)$ である。$O(S_Y)$ で交点形式を保つ S_Y の同型全体とする。$\rho \geq 2$ ならば，$O(S_Y)$ は無限群である。

S_Y の元 r が $r^2=-2$ のとき

$$x \longmapsto x + \langle x, r \rangle r$$

は S_Y の鏡映 s_r を定める。Riemann-Roch より r 又は $-r$ は effective である。一方，$s_r(r)=-r$ より，s_r は自己同型から引き起されない。今，

$$W(S_Y)^{(2)} := \left\langle \{ s_r \mid r \in S_Y,\ r^2=-2 \} \right\rangle \triangleleft O(S_Y)$$

とすると，自然な map

$$\mathrm{Aut}(Y) \longrightarrow O(S_Y)/W(S_Y)^{(2)}$$

の Kernel と cokernel は有限群となり，$\mathrm{Aut}(Y)$ は $O(S_Y)/W(S_Y)^{(2)}$ が解れば，ほぼ決定できる。

$P(S_Y)$ を $\{x \in S_Y \otimes \mathbb{R} \mid x^2>0\}$ の連結成分で ample class を含むものとする。$W(S_Y)^{(2)}$ は $P(S_Y)$ に自然に作用しており，その基本領域が Kähler cone

$$C(Y) := \left\{ x \in P(S_Y) \mid \langle x, r \rangle > 0 \quad \text{for } {}^\forall r \in S_Y,\ r^2=-2,\ r \geq 0 \right\}$$

である。従って $\mathrm{Aut}(Y)$ は $\mathrm{Aut}(C(Y))$ と有限群を modulo として同型である。

次の3つのCaseが起る：

(a) $|\mathrm{Aut}(Y)| < \infty$ $\left(\Leftrightarrow [O(S_Y) : W(S_Y)^{(2)}] < \infty \right.$
$\left. \Leftrightarrow \# \text{ nodal curves on } Y < \infty \right)$

(b) $|\mathrm{Aut}(Y)| = \infty$, $[O(S_Y) : W(S_Y)] < \infty$。
ここで $W(S_Y)$ は S_Y の全ての鏡映で生成される群。

(c) $[O(S_Y) : W(S_Y)] = \infty$.

(a)の場合は、全てのnodal curves，従って Kähler cone を書き出すことができ、Aut(Y)も計算できる。(b)の場合、Vinbergのalgorithm [8]によって $W(S_Y)$ の基本領域を見つけることができ、これを用いればAut(Y)が計算できるが(a)より、難しい。この方法でVinberg [9]は、transcendental lattice T_Y $(:= S_Y^{\perp} \text{ in } H^2(Y, \mathbb{Z}))$ が

$$T_Y \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の場合に、Aut(Y)を計算している。(c)の場合、一般的な方法は知られていない。結果的には、我々の場合、このCaseに属する。

Vinbergはunimodular hyperbolic latticeの鏡映群が、いつ直交群の中で指数有限となるかを研究した。Conway-Sloane [2]はVinbergの結果をLeech格子の理論を用いて解釈し直しており、更に、Borcherds [1]は non-reflection-part の計算をしている。次節でLeech格子，Conwayの一結果を述べる。

§3. Leech 格子

lattice（格子）とは、階数有限の自由$\mathbb{Z}$-加群 L と、その上の $\mathbb{Z}$ に値を取る非退化対称双一次形式 $\langle\ ,\ \rangle$ の組をいう。$(L, \langle\ ,\ \rangle)$ が even とは $\langle x, x\rangle \equiv 0\ (2)\ (\forall x \in L)$ が成り立つとき，unimodular とは形式に付随した行列の行列式が ± 1 のときをいう。

例 (i)　Cartan 行列 A_m, D_n, E_ℓ $(m \geq 1,\ n \geq 4,\ \ell = 6, 7, 8)$ で定まる lattice を同じ記号 A_m, D_n, E_ℓ で表わし、これらの直和で表わされる lattice を root lattice と呼ぶ。ここでは、これらは負定値に符号を選んでおく。

(ii)　行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる lattice を U で表わす。U は even unimodular で符号は (1, 1) である。

(iii)　Y を K3 曲面とする。　$H^2(Y, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$ で cup 積により $H^2(Y, \mathbb{Z})$ は even, unimodular, 符号 = (3, 19) の lattice となる。不定値の場合，lattice の同型類は、この性質で一意的に定まり、

$$(H^2(Y, \mathbb{Z}), \langle\ ,\ \rangle) \cong U \oplus U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8$$

である。

(iv) 定値 even unimodular lattice：　この場合、同型類は階数では、一意的に定まらない。

階数	8	16	24	32	40	....
同型類の個数	1	2	24	$\geqq 10^7$	$\geqq 10^{51}$	....

階数 24 の even, definite unimodular lattice を <u>Niemeier 格子</u>と呼ぶ。この中に一つだけ他と性質が著しく異なるものが、存在する。これが Leech 格子である。

<u>Def</u>. <u>Leech 格子</u> Λ とは、even, negative definite, unimodular lattice で (-2)-vectors を含まない。

Leech 格子の具体的な構成法は、Conway-Sloane [2], Chap. 10 を見て下さい。ここでは、次の事を注意するにとどめます。
Λ の具体的構成には、<u>Steiner system $S(5, 8, 24)$</u> (または binary Goray code) が用いられる。

<u>Def</u>. 以下、最後まで、$L = \Lambda \oplus U$ とし、L の元 v を

$$v = (\lambda, m, n)\ ,\quad \lambda \in \Lambda\ ,\quad m, n \in \mathbb{Z}\ ,\quad v^2 = \lambda^2 + 2mn$$

と表わす。また $w = (0, 0, 1) \in L$ とする。

$L \ni r$ が <u>Leech root</u> とは

(1) $r^2 = -2$;

(2) $\langle r, w \rangle = 1$

を満たすときをいう。Leech roots 全体の集合を Δ とすると、Δ と Λ は集合として 1:1 に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \longleftrightarrow & \Lambda \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\lambda, 1, -1-\lambda^2/2) & \longleftrightarrow & \lambda \end{array}$$

$P(L)$ を $\{x \in L \otimes \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$ の連結成分の一つ，$W(L)$ $(= W(L)^{(1)})$ を L の鏡映群とすると，$W(L)$ は $P(L)$ に作用する。今

$$D = \left\{ x \in P(L) \,\middle|\, \langle x, r \rangle > 0 \quad {}^{\forall} r \in \Delta \right\}$$

とおくと，次が成り立つ。

<u>定理</u>（Conway，[2]，Chap. 27）．　D は $W(L)$ の $P(L)$ への作用に関する基本領域であり，

$O(L) \cong W(L) \rtimes Aut(D)$，　$Aut(D) \cong \mathbb{Z}^{24} \rtimes O(\Lambda)$

が成り立つ。

注　$L = \Lambda \oplus U$ の鏡映群は $O(L)$ で指数有限でないが，$O(L)/W(L)$ は free abel 群を指数有限で含む。このような hyperbolic lattice は特別なもので，ほとんど他に例がない。

§4．主定理の証明

$X = Km(C)$ を generic Kummer 曲面とする。このとき，S_X は rank 17，$\det S_X = \pm 64$ である。

<u>Lemma 1</u>．　$Aut(X) \cong \Gamma(S_X)/W(S_X)^{(2)}$．

ここで　$\Gamma(S_X) = \{ \varphi \in O(S_X) \mid \varphi | S_X^*/S_X = \pm 1 \}$，　$O(S_X)/\Gamma(S_X) \cong \mathfrak{S}_6$，

$S_X^* = Hom(S_X, \mathbb{Z})$，$\mathfrak{S}_6$ は $C \to \mathbb{P}^1$ の分岐点の置換群とする。

<u>Lemma 2</u>. S_x の $L = \Lambda \oplus U$ への埋め込みで次を満たすものが存在する:

(i) L/S_x は torsion free.

(ii) $S_x^{\perp}$ in L は $R = A_3 \oplus A_1^6$ を指数2で含む。

(iii) R の simple roots は Leech roots である。

証明は Leech 格子の中の9点で、対応する Leech roots の生成する lattice が R と同型になるものを具体的に構成する。

<u>Lemma 3</u>. $D' := D \cap P(S_x)$ とすると D' は 316 個の超平面で真に囲まれている。これらの超平面は (-2)-vector の直交補空間となっているものが 32 個, (-4)-vector に対応するものが 32 個, 別の (-4)-vector に対応するものが 60 個, (-12)-vector に対応するものが 192 個に分けられる。

証明のポイントは次の点である: $r \in \Delta$ に対し、$H_r := \{ x \in P(L) \mid \langle x, r \rangle = 0 \}$ とすると.

$$H_r \cap P(S_x) \neq \phi \iff R' := \langle R, r \rangle \text{ は negative definite}$$

が成り立つことに注意する。R' は root lattice であり、これと Leech 格子の幾何を用いれば Lemma 3 が示される。Lemma 3 の超平面に対応する R' は順に

$$R' = A_3 \oplus A_1^7 \ , \ D_4 \oplus A_1^6 \ , \ A_3 \oplus A_3 \oplus A_1^4 \ , \ A_5 \oplus A_1^5$$

である。

<u>Lemma 4</u>. (i) Lemma 3 に現われる 32 個の (−2)-vector は modulo $W(S_X)^{(2)}$ で $\{N_\alpha, T_\beta\}$ と同一視できる。

この同一視の下で

(ii) $w = (0, 0, 1) \in \Lambda \oplus U$ の S_X^* への projection は $\sum (N_\alpha + T_\beta)/4$ に一致する。

(iii) $\mathrm{Aut}(D') \cong (\mathbb{Z}/2)^5 \rtimes \mathfrak{S}_6$ で、$(\mathbb{Z}/2)^5$ は translation $\{t_\alpha\}$ と Switch σ で生成され、$\mathfrak{S}_6$ は $C \to \mathbb{P}^1$ の分岐点の置換群である。

(iv) H を F の超平面切断の X への引き戻しとすると、

- $\{32\text{個の } (-4)\text{-vectors}\} = \{H - 2N_\alpha,\ \sigma(H - 2N_\alpha)\}$,
- $\{60\text{個の } (-4)\text{-vectors}\} = \left\{ H - (N_\alpha + N_\beta + N_\gamma + N_\delta) \;\middle|\; \begin{array}{l}\{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta\} \text{ は} \\ \text{Göpel tetrad}\end{array} \right\}$,
- $\{192\text{個の } (-12)\text{-vectors}\} = \left\{ 3H - 2(N_\alpha + N_\beta + N_\gamma + N_\delta + N_\varepsilon + N_\lambda) \;\middle|\; \{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta, n_\varepsilon, n_\lambda\} \text{ は "good hexad"} \right\}$.

ここで "good hexad" とは、どの4点も T_α の像に含まれず、Göpel tetrad でもない 6点の node の集合をいう。

次に、Lemma 4, (iv) で述べた negative vector と自己同型の関係について述べる。

<u>Lemma 5</u>. (i) P_α を node n_α $(\in F)$ に対応する projection とする。

$$P_\alpha^* \,|\, S_X = \text{the reflection w.r.to } H-2N_\alpha$$

(ii) $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ を Göpel tetrad $\{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta\}$ に付随した Cremona 変換とすると、

$$C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^* \,|\, S_X \doteqdot \text{the reflection w.r.to } H-(N_\alpha+N_\beta+N_\gamma+N_\delta).$$

ここで "$\doteqdot$" の意味は、$C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^*$ は鏡映面に non-trivial に作用し、~~鏡~~ 鏡映は鏡映面を pointwise に fix する違いを表わしている。

192個の(−12)-vector r に対しては、Hodge isometry

$$\psi_r : H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$$

で Kähler cone を保つものが構成できる。従って K3曲面の Torelli 型定理より ψ_r は自己同型 κ_r より引き起されている：$\psi_r = \kappa_r^*$。詳しい定義は Keum [5], Kondo [7] を参照して下さい。

<u>Lemma 6</u>. ① ψ_r は無限位数。

② $\psi_r^{-1} = \psi_{\sigma^*(r)}$。

③ $H_r^+ := \{x \in P(S_X) \mid \langle x, r\rangle \geq 0\}$, $H_r^- := \{x \mid \langle x, r\rangle \leq 0\}$ とすると、

$$\psi_r(H^+_{\sigma^*(r)}) \subset H_r^-\,。$$

言い換えると ψ_r は "鏡映" のごとくふるまう。

Lemma 5, 6 より P_α^*, $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^*$, $K_\gamma^* = \Psi_\gamma$ は全て、D' の面を鏡映面とする鏡映のごとくふるまう。従って標準的議論により次を得る。

Lemma 7. P_α^*, $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^*$, $(\sigma \circ p_\alpha \circ \sigma)^*$, K_γ^* で生成される部分群を N とする。このとき

$$\varphi \in O(S_X) \ , \quad \varphi(C(X)) \subset C(X) := \text{Kähler cone}$$

に対し $g \in N$ が存在して $g \circ \varphi \in \mathrm{Aut}(D')$ とできる。

以上の Lemma 1 − 7 より主定理が従う。

References

[1] R. Borcherds, *Automorphism groups of Lorentzian lattices*, J. Algebra **111** (1987), 133-153.

[2] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss. Bd 290, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1988.

[3] J.I. Hutchinson, *On some birational transformations of the Kummer surface into itself*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) **7** (1901), 211-217.

[4] R.W.H.T. Hudson, *Kummer's quartic surface*, Cambridge Univ. Press. 1905.

[5] J.H. Keum, *Automorphisms of Jacobian Kummer surfaces*, to appear in Compositio Math.

[6] F. Klein, *Ueber Configurationen, Welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind*, Math. Ann. **27** (1886), 106-142.

[7] S. Kondo, *The automorphism group of generic Jacobian Kummer surface*, J. Algebraic Geometry(to appear).

[8] E.B. Vinberg, *Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces*, in Proc. Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and appl. to Moduli (Bombay 1973), pp. 323-348. Oxford Univ. Press 1975.

[9] E.B. Vinberg, *The two most algebraic $K3$ surfaces*, Math. Ann. **265** (1983), 1-21.